

Nome:

1. Campo de uma esfera com buraco (H11)

Na superfície de uma esfera oca de raio R , da qual foi cortado no polo norte uma tampa definida pelo ângulo de abertura $\theta = \alpha$, fica uma densidade de carga superficial homogeneamente distribuída $Q/4\pi R^2$.

a. Mostre que o potencial no interior do volume da esfera pode ser escrito na forma,

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} [P_{\ell+1}(\cos \alpha) - P_{\ell-1}(\cos \alpha)] \frac{r^\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta)$$

onde devemos para $\ell = 0$ colocar $P_{\ell-1}(\cos \alpha) = -1$. Qual é a forma do potencial no exterior da esfera oca?

b. Determine o valor absoluto e a direção do campo elétrico na origem.

c. Qual potencial obtemos para $\alpha \rightarrow 0$?

Ajuda: Use a seguinte relação para a densidade de carga de superfície:

$$-\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \left[\frac{\partial \Phi_{>}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{<}}{\partial r} \right]_{r=R},$$

onde os índices $<$ resp. $>$ mostram para as regiões no interior resp. no exterior da esfera. Para a integração a seguinte relação de recursão é útil,

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2\ell+1} \left(\frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}(x)}{dx} \right)$$

que vale para $\ell > 0$.

Solução

a. As soluções no interior e exterior da esfera oca devem se juntar de maneira contínua em $r = R$. Portanto, os seguintes ansätze são válidos,

$$\Phi_{>}(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell+1} P_\ell(\cos \theta) \quad , \quad \Phi_{<}(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \left(\frac{r}{R} \right)^\ell P_\ell(\cos \theta) .$$

Seja dada a densidade superficial de carga,

$$\sigma(\cos \theta) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi R^2} & \text{quando } \cos \theta < \cos \alpha \\ 0 & \text{senão} \end{cases} .$$

Agora temos a lei de Gauß,

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \left[\frac{\partial \Phi_{<}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{>}}{\partial r} \right]_{r=R} = \frac{1}{R} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) A_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) .$$

Usando a ortogonalidade dos polinômios de Legendre, $(2\ell + 1) \int_{-1}^1 dx P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) = 2\delta_{\ell, \ell'}$, e a abreviação $x = \cos \theta$ aplicamos a operação $\int_{-1}^1 dx P_{\ell'}(x) \dots$ para os dois lados da última equação,

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{-1}^{+1} dx \sigma(x) P_{\ell'}(x) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \int_{-1}^{\cos \alpha} dx P_{\ell'}(x) = \frac{1}{R} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) A_{\ell} \int_{-1}^{+1} dx P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{R} A_{\ell'} .$$

Portanto, vale para os coeficientes de expansão com a dada relação,

$$\begin{aligned} A_{\ell} &= \frac{Q}{8\pi \epsilon_0 R} \int_{-1}^{\cos \alpha} dx P_{\ell}(x) = \frac{Q}{8\pi \epsilon_0 R} \frac{1}{2\ell + 1} [P_{\ell+1}(x) - P_{\ell-1}(x)]_{-1}^{\cos \alpha} \\ &= \frac{Q}{8\pi \epsilon_0 R} \frac{1}{2\ell + 1} (P_{\ell+1}(\cos \alpha) - P_{\ell-1}(\cos \alpha)) , \end{aligned}$$

pelo menos para $\ell \neq 0$. Mas para $\ell = 0$ a integral é trivial: Temos $\int_{-1}^{\cos \alpha} dx P_{\ell}(x) = \cos \alpha + 1 = P_1(\cos \alpha) - P_{-1}(\cos \alpha)$ com a definição do enunciado. Inserção em nossos ansätze originais dá imediatamente o potencial no interior e no exterior da esfera oca.

b. Temos,

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi = -\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \hat{\mathbf{e}}_{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + 0 = -\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_{\theta} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \cos \theta} .$$

Portanto, temos no interior,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{8\pi \epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{P_{\ell+1}(\cos \alpha) - P_{\ell-1}(\cos \alpha)}{2\ell + 1} \frac{r^{\ell-1}}{R^{\ell+1}} \left[-\hat{\mathbf{e}}_r \ell P_{\ell}(\cos \theta) + \hat{\mathbf{e}}_{\theta} \sin \theta \frac{dP_{\ell}(x)}{dx} \right] .$$

Para $r \rightarrow 0$ todos os termos com a exceção do $\ell = 1$ desaparecem. Temos, portanto,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} = 0) = \frac{Q}{6R^2} (P_2(\cos \alpha) - P_0(\cos \alpha)) (-\hat{\mathbf{e}}_r \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_{\theta} \sin \theta) .$$

Agora, $\hat{\mathbf{e}}_r \cos \theta - \hat{\mathbf{e}}_{\theta} \sin \theta = \hat{\mathbf{e}}_z$, $P_2(\cos \alpha) = (3 \cos^2 \alpha - 1)/2$ e $P_0(\cos \alpha) = 1$. Com isso, obtemos para o campo elétrico na origem,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} = 0) = -\frac{Q}{6R^2} \hat{\mathbf{e}}_z \left(\frac{3}{2} \cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \right) = \frac{Q}{4R^2} \sin^2 \alpha \hat{\mathbf{e}}_z .$$

c. Para $\alpha = 0$ vale $\cos \alpha = 1$ e $P_{\ell}(\cos \alpha) = P_{\ell}(1) = 1$. Com isso só sobrevivem, em nossas formulas para o potencial, os termos $\ell = 0$:

$$\Phi_{<}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} , \quad \Phi_{>}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} .$$

Isso é o resultado conhecido para uma camada esférica fechada.

2. Carga imagem

Um fio fino e longo fica suspenso ao longo da direção y numa distância $z = d$ paralelo à uma placa metálica aterrada. A placa seja infinitamente estendida no plano (x, y) . A superfície da placa orientada ao lado do fio seja em $z = 0$. Na superfície do fio tem a carga Q/l por unidade de comprimento.

a. Faz um esquema do campo elétrico no semi-espaço $z > 0$. **Ajuda:** Use o princípio da carga imagem!

b. Calcule o perfil do campo elétrico em proximidade da superfície da placa.

c. Qual é a densidade superficial de cargas $\sigma(x, y)$ na superfície da placa.

d. Qual é a carga induzida na placa por unidade de comprimento na direção y ?

Comentário: Um problema similar acontece para condutores em circuitos impressos. A placa metálica corresponde ao revestimento de cobre parte traseira do circuito.

Solução

a. Analogamente a carga puntiforme em frente de uma placa metálica a gente espera agora um fio espelho com a carga $-Q$ na distância $-d$ da superfície.

b. O valor absoluto do campo para o fio é na posição $z = +d$,

$$E_{fio} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{1}{\rho} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z-d)^2}}$$

(em direção se afastando radialmente do fio). Analogamente para o fio espelho $z = -d$

$$E_{espelho} = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z+d)^2}}.$$

Na superfície da placa o campo é paralelo a \hat{e}_z . As componentes x e z do campo E na superfície da placa na posição $z = 0$ são,

$$E_{fio,x} = |E_{fio,x}| \sin \phi = |E_{fio,x}| \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{1}{\sqrt{x^2 + d^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{x}{x^2 + d^2}$$

e

$$E_{fio,z} = -|E_{fio,x}| \cos \phi = -|E_{fio,x}| \frac{d}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{1}{\sqrt{x^2 + d^2}} \frac{d}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{d}{x^2 + d^2}.$$

para o fio espelho temos analogamente,

$$E_{fio,x} = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{x}{x^2 + d^2}$$

e

$$E_{fio,z} = \frac{-Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{d}{x^2 + d^2}.$$

Isto significa, que a componente x desaparece e (para $z > 0$),

$$E_z = 2E_{fio,z} = \frac{-Q}{\pi\epsilon_0 l} \frac{d}{x^2 + d^2} .$$

c. Usamos $\rho(x, y, z) = \sigma(x, y)\delta(z)$. Além disso $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z}$, pois todas as outras componentes desaparecem na superfície. Agora colocamos uma pequena caixa (área dA paralelo à superfície) tal, que o pedaço da superfície fica dentro. Agora,

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int \varrho(x, y, z) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma(x, y) dA .$$

Além disso,

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \varrho dV = \oint_{\partial\text{caixa}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E_{z,z>0} dA .$$

Disso segue,

$$\sigma(x, y) = \epsilon_0 E_{z,z>0} = -\frac{Qd}{\pi l} \frac{1}{x^2 + d^2} .$$

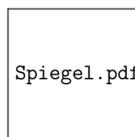
d. Integrando sobre o comprimento l na direção y e sobre todos os valores de x dá,

$$Q_{placa} = \int_0^l dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{-Qd}{\pi l} \frac{1}{x^2 + d^2} \right) = \frac{-Qdl}{\pi l} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + d^2} = \frac{-Qdl}{\pi} \frac{1}{d} \arctan \frac{x}{d} \Big|_{-\infty}^{\infty} = -Q .$$

3. Carga imagem

Dentro de uma esfera oca metálica aterrada com o raio interior a seja uma carga $+Q$ na posição $\mathbf{r}_1 = (0, 0, z_1)$. Determine a carga Q' e a posição \mathbf{r}_2 de uma carga imagem com a qual é possível descrever o potencial $\Phi(\mathbf{r})$ da distribuição de carga original somente usando o sistema consistindo da carga e da carga imagem. Determine $\Phi(\mathbf{r})$.

Ajuda: A posição \mathbf{r}_2 e a carga Q' não são inequivocamente determinados. Escolhe $\mathbf{r}_1 = (0, 0, z_1)$ e $z_2/a = a/z_1$.



Solução

A condição de contorno é $\Phi(|\mathbf{r}| = a) = 0$. Colocamos agora uma carga Q' , por razões de simetria, no ponto z_2 :

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{|\mathbf{r} - z_1\hat{\mathbf{e}}_z|} + \frac{Q'}{|\mathbf{r} - z_2\hat{\mathbf{e}}_z|}$$

com $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r$, segue à partir da condição

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r} = a\hat{\mathbf{e}}_r) = \frac{Q/a}{|\hat{\mathbf{e}}_r - z_1\hat{\mathbf{e}}_z/a|} + \frac{Q'/a}{|\hat{\mathbf{e}}_r - z_2\hat{\mathbf{e}}_z/a|} \equiv 0 .$$

Isto é satisfeito, quando

$$Q\sqrt{a^2 + z_2^2 - az_2\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_z} = -Q'\sqrt{a^2 + z_1^2 - az_1\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_z} .$$

O quadrado dá,

$$Q^2(a^2 + z_2^2 - az_2\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) = Q'^2(a^2 + z_1^2 - az_1\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)Q'Q < 0 .$$

Como isto deve ser satisfeito para todos os ângulos $\theta = \arccos(\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)$,

$$Q^2(-az_2\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) = Q''(-az_1\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) \quad \text{e} \quad Q^2(a^2 + z_2^2) = Q''(a^2 + z_1^2) ,$$

resp.

$$\frac{Q^2}{Q''} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a^2 + z_1^2}{a^2 + z_2^2} .$$

A segunda equação dá,

$$z_1a^2 + z_1z_2^2 - a^2z_2 - z_1^2z_2 = 0 ,$$

o que dá $z_1 = a^2/z_2$. Com isso substituímos z_1 na primeira equação,

$$Q' = \pm Q \frac{z_2}{a} \quad \text{e} \quad Q'Q < 0 .$$

Uma solução trivial obtemos para $z_2 = z_1$ e $Q = -Q'$.

4. Carga imagem

Uma superfície condutor no plano (x, y) tem uma protuberância em forma de uma semi-esfera com raio R . O centro da esfera fica no plano e na origem das coordenadas. Sobre o eixo de simetria $\hat{\mathbf{e}}_z$ numa distância $d > R$ à partir do plano tem uma carga puntiforme q . Determine com o método da carga imagem o potencial $\phi(\mathbf{r})$ e a força \mathbf{F} sobre a carga q .

a. Para fazer com que a superfície da semiesfera fica uma superfície equipotencial ($\phi \equiv 0$) precisamos de uma carga espelho q_1 sobre o eixo z numa distância z_1 à partir da origem. Determine q_1 e z_1 .

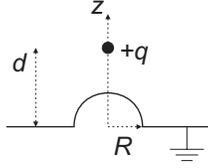
b. Para o plano (x, y) virar uma superfície equipotencial também, precisamos de mais duas cargas imagem q_2 e q_3 . Determine o valor e a posição destas cargas.

c. Com os valores e as posições das cargas determine: O potencial eletrostático $\phi(\mathbf{r})$ para um ponto arbitrário \mathbf{r} acima da superfície condutora, a força \mathbf{F} sobre a carga q e a sua direção (repulsiva ou atrativa).

Solução

a. O potencial deve satisfazer a condição de contorno,

$$\phi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \text{superfície da esfera}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - z_0\hat{\mathbf{e}}_z|} + \frac{q_1}{|\mathbf{r} - z_1\hat{\mathbf{e}}_z|} \right]_{\mathbf{r} \in \text{superf. esfera}} = 0 .$$



Isto pode ser satisfeito de maneira não trivial por $z_1 = R^2/z_0$ e $q_1 = -qR/z_0$, pois

$$\begin{aligned} \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - z_0 \hat{\mathbf{e}}_z|} + \frac{-qR/z_0}{|\mathbf{r} - \frac{R^2}{z_0} \hat{\mathbf{e}}_z|} \right]_{\mathbf{r} \in \text{superf. esfer.}} &= \frac{q}{\sqrt{X^2 + Y^2 + (Z - z_0)^2}} - \frac{qR/z_0}{\sqrt{X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{R^2}{z_0}\right)^2}} \\ &= \frac{q}{\sqrt{R^2 - 2Zz_0 + z_0^2}} - \frac{qR}{\sqrt{z_0^2 X^2 + z_0^2 Y^2 + z_0^2 Z^2 - 2z_0 Z R^2 + R^4}} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

b. As duas cargas adicionais devem refletir as cargas q e q_1 no plano (x, y) : $z_2 = -z_0$ e $q_2 = -q$ e $z_3 = -z_1$ e $q_3 = -q_1$.

c. Com isso temos uma expressão completa para o potencial,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=0}^3 \frac{q_k}{|\mathbf{r} - z_k \hat{\mathbf{e}}_z|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - z_0 \hat{\mathbf{e}}_z|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + z_0 \hat{\mathbf{e}}_z|} + \frac{R}{|z_0 \mathbf{r} + R^2 \hat{\mathbf{e}}_z|} - \frac{R}{|z_0 \mathbf{r} - R^2 \hat{\mathbf{e}}_z|} \right) .$$

A força agindo sobre a carga segue do gradiente do campo das três cargas imagem no lugar da q ,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\nabla_{\mathbf{r}=z_0 \hat{\mathbf{e}}_z} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^3 \frac{q_k}{|\mathbf{r} - z_k \hat{\mathbf{e}}_z|} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{|z_0 \hat{\mathbf{e}}_z + z_0 \hat{\mathbf{e}}_z|} + \frac{R}{|z_0^2 \hat{\mathbf{e}}_z + R^2 \hat{\mathbf{e}}_z|} - \frac{R}{|z_0^2 \hat{\mathbf{e}}_z - R^2 \hat{\mathbf{e}}_z|} \right) \\ &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2z_0} + \frac{R}{z_0^2 + R^2} - \frac{R}{z_0^2 - R^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2z_0} + \frac{2R^3}{z_0^4 - R^4} \right) > 0 . \end{aligned}$$

Portanto, a força é atrativa.

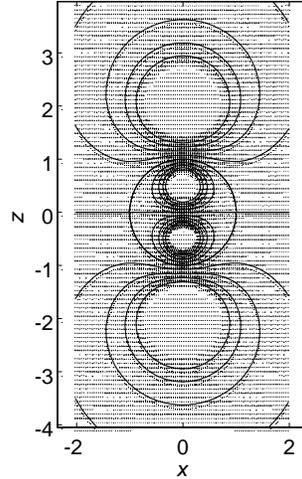
5. Multipolos

Uma carga puntiforme de tamanho $+2Q$ fica no lugar $(0, 0, a)$, uma outra de tamanho $+1Q$ no lugar $(0, 0, -a)$. Calcule a. a contribuição monopolar, b. dipolar e c. quadrupolar da expansão multipolar.

Solução

a. A distribuição de cargas é parametrização por $\rho(\mathbf{r}) = 2Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-a) + Q\delta(x)\delta(y)\delta(z+a)$. Então, o momento monopolar é,

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = 3Q .$$



b. O momento dipolar é,

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 2Q \int \mathbf{r} \delta(x) \delta(y) \delta(z-a) d^3\mathbf{r} + Q \int \mathbf{r} \delta(x) \delta(y) \delta(z+a) d^3\mathbf{r} \\ &= 2Qa \hat{\mathbf{e}}_z + Q(-a) \hat{\mathbf{e}}_z = Qa \hat{\mathbf{e}}_z . \end{aligned}$$

c. O momento quadrupolar é $q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$. Em particular,

$$q_{11} = q_{22} = 2Q \int (3x^2 - r^2) \delta(x) \delta(y) \delta(z-a) d^3\mathbf{r} + Q \int (3x^2 - r^2) \delta(x) \delta(y) \delta(z+a) d^3\mathbf{r} = -3Qa^2 ,$$

$$q_{33} = 2Q \int (3z^2 - r^2) \delta(x) \delta(y) \delta(z-a) d^3\mathbf{r} + Q \int (3z^2 - r^2) \delta(x) \delta(y) \delta(z+a) d^3\mathbf{r} = 6Qa^2 ,$$

$$q_{12} = 0 .$$

6. Momento di- e quadrupolar de distribuições de cargas esféricas

Distribuições de cargas esfericamente simétricas têm momento dipolar ou quadrupolar? Justifique!

Solução

Distribuições esfericamente simétricas parecem fora do volume, dentro do qual elas ficam como cargas puntiformes e, portanto, pode ser completamente descritas pelo momento monopolar, isto é, elas têm nem momento dipolar nem quadrupolar.

7. Dipolo elétrico num campo

Qual é a força agindo sobre um dipolo elétrico $\mathbf{p} = ed \cdot \hat{\mathbf{e}}_r$ no ponto \mathbf{r} alinhado ao longo das linhas de campo de um campo externo produzido por esfera com raio R homoganeamente carregada com uma carga Q ?

Solução

Seguindo a lei de Gauß, $\int_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \varrho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$ fora da esfera,

$$\int_{\partial V} E dA = E 4\pi r^2 = \int_{\partial V} E dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

e com isso,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r .$$

A força agora é,

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{d}/2) + e\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}/2) = \frac{Qe}{4\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_r \left(\frac{1}{(r - d/2)^2} - \frac{1}{(r + d/2)^2} \right) .$$

para pequenos $d \ll r$ podemos aproximar da maneira seguinte,

$$\mathbf{F} = \frac{Qe}{4\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_r \frac{(r + d/2)^2 - (r - d/2)^2}{(r - d/2)^2 (r + d/2)^2} \simeq \frac{Qe}{4\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_r \frac{2dr}{r^4} .$$

Este resultado também segue para momentos dipolares pequenos aproximando a energia de interação por

$$W = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = -ed\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r = -\frac{Qed}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

onde supomos, que $\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}/2) \simeq \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{d}/2)$. A força finalmente é,

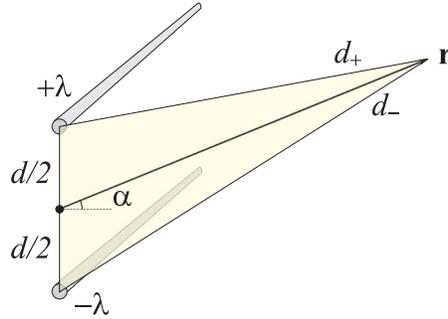
$$\mathbf{F} = -\nabla W = -\frac{Qed}{2\pi\epsilon_0 r^3} \hat{\mathbf{e}}_r .$$

8. Campo dipolar em duas dimensões

Considere dois condutores paralelos infinitamente longos com distância d tendo a densidade linear de cargas $+q$ resp. $-q$ (carga $\pm Q$ por comprimento de condutor l). Usando o teorema de Gauß calcule primeiro o campo elétrico e o potencial elétrico de um condutor. Então calcule o potencial de ambos os condutores por superposição dos potenciais individuais como função da distância r e do ângulo α (vide figura). **Nota:** Escolhe como volume de integração um cilindro com o comprimento l e o raio r ao longo do eixo de simetria em torno do fio. Determine o comportamento assintótico para $r \gg d/2$ e para $r \ll d/2$. Para fazer isso, faz uma expansão de Taylor da expressão usando: $\ln \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \approx -2\epsilon + O(\epsilon^3)$. Escreve o resultado como função do momento dipolar \mathbf{p} , onde $p = |\mathbf{p}| = qd$ é positivo e indica a direção do vetor do momento dipolar mostrando do condutor positivo até o negativo.

Solução

Com o teorema integral de Gauß, $\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \vec{n} dA = 4\pi \int_V \rho dV$ segue $E l 2\pi r = 4\pi Q$, com a



carga Q num pedaço de fio de comprimento l . Com a definição da densidade linear de carga $\lambda = Q/l$ segue, $E = \frac{2\lambda}{r}$. Para o potencial Φ ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$) a gente integra o campo e obtém:

$$\Phi = -2\lambda \ln(r) .$$

Com dois condutores adicionamos os potenciais: $\Phi = -2\lambda(\ln(d_+) - \ln(d_-)) = -\lambda \ln \frac{d_+^2}{d_-^2}$. Para d_+ e d_- a gente obtém:

$$d_+^2 = r^2 + a^2 - 2ar \sin \alpha, \quad \text{e} \quad d_-^2 = r^2 + a^2 + 2ar \sin \alpha ,$$

onde colocamos $a = d/2$. Portanto, o potencial dos dois condutores é:

$$\Phi = -\lambda \ln \left(\frac{1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} \sin \alpha}{1 + \frac{a^2}{r^2} + 2\frac{a}{r} \sin \alpha} \right) = -\lambda \ln \left(\frac{1 + \frac{r^2}{a^2} - 2\frac{r}{a} \sin \alpha}{1 + \frac{r^2}{a^2} + 2\frac{r}{a} \sin \alpha} \right) .$$

Para curtas distâncias $r/a \ll 1$ a gente pega a segunda expressão e, negligenciando os termos com r^2/a^2 , obtém

$$\Phi = 4\lambda \frac{r}{a} \sin \alpha .$$

Para longas distâncias $r/a \gg 1$ a gente pega o primeiro termo e obtém analogamente,

$$\Phi = 4\lambda \frac{a}{r} \sin \alpha .$$

Com $\sin \alpha = -\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{pr}$ segue para curtas distâncias $\Phi = -2\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{a^2}$ e para longas distâncias $\Phi = -2\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^2}$.